

# 数学中的具体计算

彭博

2016 年 10 月 26 日

我们在此具体计算一些具启发性的初等问题（且其中某些问题在教科书中较为少见）。本文正在不定期加入内容中，你可以在 [withablink.com/math](http://withablink.com/math) 获得本文最新版本，留下意见建议。感谢阅读。

【放在这里好像没人看，隐藏了绝大部分内容，改成在知乎专栏里面写吧。请关注 <https://www.zhihu.com/people/bopengbopeng>】

## 目录

<b>1</b>	<b>代数几何：曲线</b>	<b>3</b>
1.1	例子： $\mathbb{P}^1$	3
1.1.1	例子： $\mathcal{O}(-1)$	3
1.1.2	例子： $\mathcal{O}(n)$	4
1.1.3	例子： $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}$	4
1.1.4	例子： $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}^*$	4
1.1.5	相关验证	5
1.2	Euler 序列与 $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}$	5
1.3	例子： $\mathbb{P}^2$	6
1.4	例子：平面代数曲线	6
1.4.1	例子： $\mathcal{O}(n)$	7
1.4.2	例子： $\mathbf{T}_X^*$	7
1.4.3	相关验证	8
1.5	Riemann-Roch (待写)	9
1.6	其他话题 (待写)	9
<b>2</b>	<b>几何 (1)</b>	<b>10</b>
2.1	从 Hodge 数到 Genus	10
2.1.1	Genus 的统一公式	10
2.2	示性类：Chern 类，Chern 特征，Todd 类	11

2.2.1	用 Chern 类表达 Chern 特征和 Todd 类 . . . . .	11
2.2.2	张量积的公式 . . . . .	12
2.2.3	外积的公式 . . . . .	12
2.2.4	对称积的公式 . . . . .	12
2.3	Todd 类的系数与留数定理的应用 . . . . .	13
2.4	示性类: Pontryagin 类, Stiefel-Whitney 类 . . . . .	14
2.5	未整理的内容 . . . . .	14
<b>3</b>	<b>代数几何: 高维的例子</b>	<b>15</b>
3.1	Adjunction 公式 . . . . .	15
3.2	Hilbert 多项式 . . . . .	15
3.3	形变理论 (待写) . . . . .	17
3.4	Hodge 数的具体计算 . . . . .	17
3.4.1	例子: 曲面 . . . . .	18
3.4.2	例子: Calabi-Yau 3-流形 . . . . .	19
3.4.3	例子: $\mathbb{P}^n$ . . . . .	20
3.4.4	例子: 超平面 . . . . .	20
3.4.5	例子: complete intersection . . . . .	21
3.5	更多拓扑不变量 . . . . .	21
3.6	代数闭链 . . . . .	22
3.7	算术几何: Mumford 的藏宝图 . . . . .	22

# 1 代数几何：曲线

## 1.1 例子： $\mathbb{P}^1$

$\mathbb{P}^1$  可以用  $U$  和  $V$  覆盖， $U$  的坐标是  $(1, u)$ ， $V$  的坐标是  $(v, 1)$ 。在它们重叠处，转换函数是  $v = \frac{1}{u}$ ，因为根据齐次坐标的定义：

$$(1, u) = \left(\frac{1}{u}, 1\right)$$

对于  $X = \mathbb{P}^1$  上的各种线丛  $L$ ，有如下表格：

$L$	$\deg(L)$	$h^0(L)$	$h^1(L)$	$\chi(L)$	整体截面基	相关概念
$\mathcal{O}(-3)$	-3	0	2	-2	$\emptyset$	
$\mathcal{O}(-2)$	-2	0	1	-1	$\emptyset$	$\Omega, \omega, K, \mathbf{T}_X^*$
$\mathcal{O}(-1)$	-1	0	0	0	$\emptyset$	tautological bundle
$\mathcal{O}$	0	1	0	1	$\{1\}$	structure sheaf
$\mathcal{O}(1)$	1	2	0	2	$\{1, u\}$	twisting sheaf, $\mathbf{H}$
$\mathcal{O}(2)$	2	3	0	3	$\{1, u, u^2\}$	$\Omega^*, \omega^*, -K, \mathbf{T}_X$
$\mathcal{O}(3)$	3	4	0	4	$\{1, u, u^2, u^3\}$	

我们在下文解释此表。思路：先写出一个亚纯截面，计算其零点和极点阶数，获得  $\deg(L)$ 。之后寻找整体截面，得到  $h^0$ 。再写出在  $U$ 、 $V$ 、 $U \cap V$  上的截面，计算  $h^1$ 。此后  $\chi = h^0 - h^1$ 。最后，验证可用 Riemann-Roch 公式从  $\deg$  和  $K$  得到  $\chi$ 。

### 1.1.1 例子： $\mathcal{O}(-1)$

考察  $\mathbb{P}^1$  上的重言线丛，它自然嵌入  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$ ，在  $U$  上坐标  $U \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  是  $\psi_u : ((1, u), (\lambda_U, \lambda_U u)) \mapsto \lambda_U$ ，在  $V$  上坐标是  $\psi_v : ((v, 1), (\lambda_V v, \lambda_V)) \mapsto \lambda_V$ 。

如何在  $U$  和  $V$  间转换坐标？看具体例子： $U$  上的  $((1, 3), (2, 6))$ ， $\lambda_U = 2$ ，对应  $V$  上的  $((\frac{1}{3}, 1), (2, 6))$ ， $\lambda_V = 6$ ；其中  $(1, 3)$  和  $(\frac{1}{3}, 1)$  在  $\mathbb{P}^1$  上对应，而  $(2, 6)$  和  $(2, 6)$  在  $\mathbb{C}^2$  上对应。

因此，如果  $((1, u), (\lambda_U, \lambda_U u))$  对应  $((v, 1), (\lambda_V v, \lambda_V))$ ，则  $\lambda_V = \lambda_U u$ ，转换函数（这里定义是  $\lambda_U = s_{uv} \lambda_V$ ）是：

$$s_{uv} = \lambda_U \lambda_V^{-1} = \frac{1}{u}$$

我们称此线丛为  $\mathcal{O}(-1)$ ，并定义：

$\mathcal{O}(n)$  为：转换函数是  $s_{uv} = u^n$  的线丛

考虑  $\mathcal{O}(-1)$  的截面  $\lambda_U = 1$ , 它在  $U$  上当然无零点无极点。按照转换函数, 它在  $V$  上是  $\lambda_V = u = \frac{1}{v}$ , 在  $v = 0$  有 1 阶极点, 无零点。因此它在  $\mathbb{P}^1$  上总共有 0 阶零点, 1 阶极点,  $\deg(\mathcal{O}(-1)) = 0 - 1 = -1$ 。随后同理易证在  $\mathbb{P}^1$  上  $\deg(\mathcal{O}(n)) = n$ 。

看  $\mathcal{O}(-1)$  的几个其它截面。 $\lambda_U = \frac{1}{u}$  在  $U$  上有 1 阶极点;  $\lambda_U = u$  在  $V$  上有 2 阶极点; 都存在极点。事实上  $\mathcal{O}(-1)$  无整体截面,  $h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-1)) = 0$ 。

### 1.1.2 例子: $\mathcal{O}(n)$

回忆一下, 如果转换函数是  $s_{uv} = u^n$  则为  $\mathcal{O}(n)$ 。

对于  $\mathcal{O}(1)$ , 截面  $\lambda_U = 1$  在  $V$  上是  $\lambda_V = s_{uv}^{-1}\lambda_U = \frac{1}{u} = v$ ; 而截面  $\lambda_U = u$  在  $V$  上是  $\lambda_V = 1$ 。易证此两者是  $\mathcal{O}(1)$  的整体截面的基, 所以:

$$h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) = 2$$

对于  $\mathcal{O}(2)$ , 同理知, 它的整体截面的基是  $\lambda_U = \{1, u, u^2\}$ 。如果写成齐次坐标, 则  $u = y/x$ , 基为  $\{x^2, xy, y^2\}$ 。所以  $\mathcal{O}(2)$  的整体截面是 2 次齐次多项式,  $h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2)) = 3$ 。

以此类推, 知:

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) \text{ 为 } n \text{ 次齐次多项式}$$

这对于  $\mathbb{P}^n$  都适用。

因此超平面丛  $\mathbf{H} = \mathcal{O}(1)$ 。为方便起见, 后文把  $c_1(\mathbf{H})$  也写成  $\mathbf{H}$ 。

### 1.1.3 例子: $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}$

$\mathbb{P}^1$  上的亚纯向量场包括  $\frac{\partial}{\partial u}$ ,  $v\frac{\partial}{\partial v}$  等等, 其中的全纯向量场是  $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}$  的整体截面。

由于  $\frac{\partial}{\partial u} = -v^2\frac{\partial}{\partial v}$ , 知:

$$\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}(2)$$

事实上全纯向量场的基是  $\{\frac{\partial}{\partial u} = -v^2\frac{\partial}{\partial v}, u\frac{\partial}{\partial u} = -v\frac{\partial}{\partial v}, u^2\frac{\partial}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial v}\}$ , 知:

$$h^0(\mathbb{P}^1, \mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}) = 3$$

### 1.1.4 例子: $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}^*$

$\mathbb{P}^1$  上的全纯 1-形式, 构成  $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}^*$  的整体截面。由于  $du = -\frac{1}{v^2}dv$ , 知:

$$\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}^* = \mathcal{O}(-2)$$

且  $h^0(\mathbb{P}^1, \mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}^*) = 0$ 。

$H^1$  对应  $d: \Gamma(U) \oplus \Gamma(U) \rightarrow \Gamma(U \cap V)$  的上核。 $\Gamma(U)$  包括  $\{du, udu, u^2du, \dots\}$ ;  $\Gamma(V)$  包括  $\{dv, vdv, v^2dv, \dots\}$ , 对应到  $U$  上的  $\{-u^{-2}du, -u^{-3}du, -u^{-4}du, \dots\}$ ;  $\Gamma(U \cap V)$  包括  $\{\dots, u^{-2}du, u^{-1}du, du, udu, \dots\}$  (因为在  $U \cap V$  上  $u \neq 0$ )。

由此可见  $d$  的上核是  $\{u^{-1}du\}$ , 故:

$$h^1(\mathbb{P}^1, \mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}^*) = 1, \quad \chi(\mathbb{P}^1, \mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}^*) = 0 - 1 = -1$$

### 1.1.5 相关验证

考虑 Serre 对偶:  $H^q(E) \simeq H^{n-q}(E^* \otimes \Omega)$ 。如果  $E = \mathcal{O}(n)$ , 则为:

$$h^1(\mathcal{O}(n)) = h^0(\mathcal{O}(-n-2))$$

符合此前的结果。

考虑 Riemann-Roch 公式:  $h^0(L) - h^0(L^* \otimes \Omega) = \deg(L) + 1 - g$ , 若  $\deg(L) \geq 2g - 1$  则  $h^0(L^* \otimes \Omega) = 0$ 。故若  $g = 0$ ,  $\deg(L) \geq -1$  则  $h^0(L) = \deg(L) + 1$ 。

考虑 Riemann-Roch-Hirzebruch 公式:  $\chi(X, E) = \int_X \mathbf{ch}(E) \cdot \mathbf{td}(\mathbf{T}_X)$ 。由  $\int_X \mathbf{c}_1(L) = \deg(L)$ , 知:

$$\mathbf{ch}(\mathcal{O}(n)) = 1 + \mathbf{c}_1(\mathcal{O}(n)) = 1 + n\mathbf{H}, \quad \mathbf{td}(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}) = 1 + \frac{1}{2}\mathbf{c}_1(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}) = 1 + \mathbf{H}$$

由  $\int_{\mathbb{P}^1} \mathbf{H} = 1$ , 故:

$$\chi(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) = \int_{\mathbb{P}^1} (1 + n)\mathbf{H} = 1 + n$$

## 1.2 Euler 序列与 $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}$

前面说过  $\mathbf{H} = \mathcal{O}(1)$ 。 $\mathbb{P}^1$  上的 Euler 序列是:

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{H}^{\oplus(2)} \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow 0$$

下面验证长正合序列  $0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}) \rightarrow H^0(\mathbf{H}^{\oplus(2)}) \rightarrow H^0(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}) \rightarrow 0$ , 因为  $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) = 0$ 。

首先  $\mathbf{H}$  的整体截面是  $ax + by$ , 故  $\mathbf{H}^{\oplus(2)}$  的整体截面是  $(a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$ 。现在我们将它映射到  $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}$  中的  $(a_1x + b_1y)\frac{\partial}{\partial x} + (a_2x + b_2y)\frac{\partial}{\partial y}$ 。

这是个满射, 因为如果  $f(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$  是  $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}$  的截面, 它必须在  $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$  下不变, 所以  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  必须是线性的  $ax + by$  形式。

检查一下,  $(a_1x + b_1y)\frac{\partial}{\partial x} + (a_2x + b_2y)\frac{\partial}{\partial y}$  有 4 个变量, 是 4 维; 但前面算过  $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}$  是 3 维, 说明还有 1 维的核, 下面构造。

考虑:

$$D = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

对于任何  $n$  次齐次多项式  $f(x, y)$ , 我们发现:

$$Df = n \cdot f$$

故  $D$  在  $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}$  上是单位元。所以如果我们构造:

$$H^0(\mathcal{O}) \rightarrow H^0(\mathbf{H}^{\oplus(2)}) : a \mapsto (ax, ay)$$

则正合序列成立, 因为  $ax \frac{\partial}{\partial x} + ay \frac{\partial}{\partial y} = a \cdot D$  在  $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^1}$  上是单位元。

作为验证, 对于  $\mathbb{P}^1$ , Euler 序列也等价于:

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathcal{O}(2) \rightarrow 0$$

可见正确。

同理,  $\mathbb{P}^n$  上的 Euler 序列是:

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{H}^{\oplus(n+1)} \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0$$

这个序列的对偶形式是  $0 \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}^* \rightarrow (\mathbf{H}^*)^{\oplus(n+1)} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$ , 请作为练习推导具体构造。

### 1.3 例子: $\mathbb{P}^2$

对于  $\mathbb{P}^2$  上的  $\mathcal{O}(n)$ , 其整体截面为  $n$  次齐次多项式。如  $\mathcal{O}(2)$  的整体截面的基为  $\{x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz\}$ , 故:

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n)) = \binom{n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$$

由 Euler 序列:  $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{H}^{\oplus 3} \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow 0$ , 且  $c(\mathcal{O}) = 1$ , 知:

$$c(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^2}) = c(\mathbf{H}^{\oplus 3}) = c(\mathbf{H})^3 = (1 + \mathbf{H})^3$$

则:

$$c_1(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^2}) = 3\mathbf{H}, \quad c_2(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^2}) = 3\mathbf{H}^2$$

这里和下文为了方便, 把  $c_1(\mathbf{H})$  也写成  $\mathbf{H}$ 。

由于 2 个  $\mathbb{P}^2$  中的超平面交于 1 点, 故  $\int_{\mathbb{P}^2} \mathbf{H}^2 = 1$ , 因此  $\int_{\mathbb{P}^2} c_2(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^2}) = 3$ 。验证一下,  $c_2$  是最高陈类, 所以是欧拉类  $e$ , 可验证  $\chi(\mathbb{P}^2) = 3$ , 且  $\deg(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^2}) = 3$ 。

### 1.4 例子: 平面代数曲线

令  $X$  为  $\mathbb{P}^2$  中的  $d$  次曲线。以下计算用到一些示性类知识。

### 1.4.1 例子: $\mathcal{O}(n)$

由于  $X$  嵌入  $\mathbb{P}^2$ , 可将  $\mathbb{P}^2$  上的  $\mathcal{O}(n)$  拉到  $X$  上为  $\mathcal{O}_X(n)$ 。由于  $\mathcal{O}(n)$  的整体截面为  $n$  次齐次多项式, 根据 Bezout 定理, 与  $d$  次曲线的交点个数是  $nd$ , 因此在  $X$  上有  $nd$  个零点:

$$\deg(\mathcal{O}_X(n)) = nd$$

作为验证,  $c_1(\mathcal{O}_X(n)) = n\mathbf{H}$ ,  $\int_X \mathbf{H} = d$ , 故  $\int_X c_1(\mathcal{O}_X(n)) = nd$ 。

由于  $X$  的定义方程为  $d$  次, 因此当  $n \geq d$  时, 某些  $n$  次齐次多项式在  $X$  上消失, 共有  $\binom{n+2-d}{2}$  维 (在后文讨论 Hilbert 多项式时会具体解释), 此时:

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(n)) = \binom{n+2}{2} - \binom{n+2-d}{2} \quad (1)$$

$$= nd + \frac{1}{2}d(3-d) \quad (2)$$

### 1.4.2 例子: $\mathbf{T}_X^*$

以椭圆曲线  $X : \{xz^2 - y^3 + x^2y = 0\}$  为例。由于  $(0, 1, 0)$  不在  $X$  上, 可用  $U : (x, y, 1)$  和  $V : (1, y, z)$  覆盖  $X$ 。对于  $U$  上的  $dx$ , 在  $V$  上对应到  $-\frac{1}{z^2}dz$ 。

$X$  在  $U$  上为  $\{x - y^3 + x^2y = 0\}$ , 两边求导得  $(1 - 2xy)dx + (x^2 - 3y^2)dy = 0$ , 故:

$$dx \text{ 在 } \{x^2 - 3y^2 = 0\} \text{ 为零}$$

根据 Bezout 定理  $\{x^2 - 3y^2 = 0\} \cap X_U$  共有 6 点, 对应 6 个零点。注意, 虽然此时:

$$dx = \frac{x^2 - 3y^2}{1 - 2xy} dy$$

但  $dx$  在  $\{1 - 2xy = 0\}$  并无极点, 因为  $\{1 - 2xy = 0\}$  时  $dy = 0$ 。

$X$  在  $V$  上为  $\{z^2 - y^3 + y = 0\}$ 。此时:

$$dx = -\frac{1}{z^2} dz$$

在  $\{z = 0\}$  有 2 阶极点。注意  $\{z = 0\} \cap X_V$  共有 3 点, 对应 3 个极点。故在  $X$  上:

$$\deg(dx) = 6 - 2 \cdot 3 = 0$$

同理, 对于  $d$  次曲线:

$$\deg(dx) = d(d-1) - 2d = d(d-3)$$

这说明:

$$\mathbf{T}_X^* \simeq \mathcal{O}_X(d-3)$$

下面再以  $X : \{y^2z = x^3 - xz^2\}$  为例, 寻找  $\mathbf{T}_X^*$  的整体截面。在  $U : (x, y, 1)$  上  $\{y^2 = x^3 - x\}$ , 故:

$$2y dy = (3x^2 - 1) dx$$

考虑某个重要的 1-形式:

$$\frac{dx}{y} = \frac{2dy}{3x^2 - 1}$$

左式显示它在  $\{y = 0\}$  可能有极点, 但  $3x^2 - 1$  此时非零, 故右式显示它实际无极点; 事实上  $dx$  和  $y$  只会同时为零, 且当  $\frac{dx}{y}$  无定义时,  $\frac{2dy}{3x^2 - 1}$  有定义, 反之亦然。再考察它的零点, 左式只在  $\{dx = 0\}$  时可能为零, 而右式只在  $\{dy = 0\}$  时可能为零; 由于  $X$  光滑, 此两者不可能同时成立, 故它在  $U$  上无零点也无极点。

由于  $(1, 0, 0)$  不在  $X$  上, 只需再考虑  $V : (x, 1, z)$ , 此时:

$$\frac{dx}{y} = d\left(\frac{x}{z}\right) / \left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z dx - x dz}{z}$$

注意  $X$  此时为  $\{z = x^3 - xz^2\}$ , 两边求导并整理后为  $(1 + 2xz) dz = (3x^2 - z^2) dx$ , 故:

$$\frac{z dx - x dz}{z} = \frac{-2 dz}{3x^2 - z^2} = \frac{-2 dx}{1 + 2xz}$$

重复之前推理知它在  $V$  上无零点无极点。因此得到重要结论:

$$\frac{dx}{y} \text{ 是 } \mathbf{T}_X^* \text{ 的整体截面}$$

一般而言:

$$\text{对于亏格 } g \text{ 的超椭圆曲线 } X, H^0(X, \mathbf{T}_X^*) \text{ 的基为 } \left\{ \frac{dx}{y}, \frac{x dx}{y}, \dots, \frac{x^{g-1} dx}{y} \right\}$$

而亏格  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ 。

解释一下亏格公式的几何意义。 $d$  次曲线可以退化成  $d$  条线, 如果它们是一般位置, 则两两相交; 而  $\mathbb{C}$  上的线就是黎曼球, 因此有  $d$  个两两相交的黎曼球, 画出立体图即可看到亏格公式。

### 1.4.3 相关验证

考虑 adjunction 公式:  $c(\mathbf{T}_X) = \frac{c(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^2})}{c(\mathcal{O}(d))} = \frac{(1+\mathbf{H})^3}{1+d\mathbf{H}}$ , 故:

$$c_1(\mathbf{T}_X) = (3 - d) \mathbf{H}$$



考虑 Riemann-Roch-Hirzebruch 公式:  $\chi(X, E) = \int_X \mathbf{ch}(E) \cdot \mathbf{td}(\mathbf{T}_X)$ 。由  $\mathbf{ch}(\mathcal{O}(n)) = 1 + n \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{td}(\mathbf{T}_X) = 1 + \frac{1}{2} \mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X) = 1 + \frac{1}{2}(3-d) \mathbf{H}$ ,  $\int_X \mathbf{H} = d$ , 故:

$$\chi(X, \mathcal{O}(n)) = \int_X (n + \frac{1}{2}(3-d)) \mathbf{H} = nd + \frac{1}{2}d(3-d)$$

## 1.5 Riemann-Roch (待写)

$$\deg(L) = \chi(L) - \chi(\mathcal{O}) = h^0(L) - h^1(L) - h^0(\mathcal{O}) + h^1(\mathcal{O}) = h^0(L) - h^1(L) - 1 + g.$$

## 1.6 其他话题 (待写)

用多种方式解释为何椭圆曲线有群结构。Picard group etc. 再证明 Weil conjecture for hyperelliptic curves. Bombieri-Stepanov. Oesterle bound. Weil 的做法.



分别对应  $c$ ,  $td$ , 和  $L$ -genus 的 Chern 根形式。且此三者积分后, 就分别得到上面的  $\chi_y$ 。

【待续。你可以在 [withablink.com/math](http://withablink.com/math) 获得本文最新版本, 留下意见建议。感谢阅读。】

## 2.2 示性类: Chern 类, Chern 特征, Todd 类

先看例子。由 splitting principle, 若  $E = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ , 则:

若令  $x_i = c_1(L_i)$ , 则  $\{x_i\}$  称为  $E$  的 Chern 根

有:

$c(E)$	$(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)$
$c_1(E)$	$x_1 + x_2 + x_3$
$c_2(E)$	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
$c_3(E)$	$x_1x_2x_3$
$ch(E)$	$(1 + x_1 + \frac{1}{2!}x_1^2 + \dots) + (1 + x_2 + \frac{1}{2!}x_2^2 + \dots) + (1 + x_3 + \frac{1}{2!}x_3^2 + \dots)$
$td(E)$	$(1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{12}x_1^2 + \dots)(1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{12}x_2^2 + \dots)(1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{12}x_3^2 + \dots)$

注意:

$$c(E) = 1 + \sum_{i=1}^n c_i(E)$$

一般而言, 对于线丛  $L$ , 令  $c_1(L) = x$ , 有:

$$c(L) = 1 + x, \quad ch(L) = e^x = 1 + x + \dots, \quad td(L) = \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \dots$$

而对于  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$ , 有:

$$c(E) = c(E_1)c(E_2), \quad ch(E) = ch(E_1) + ch(E_2), \quad td(E) = td(E_1)td(E_2)$$

由此可推出上表元素。

### 2.2.1 用 Chern 类表达 Chern 特征和 Todd 类

$ch$  和  $td$  都可用  $c_i$  表达, 其中  $ch$  的表达又称为 Newton's identities。请验证:

$$ch(E) = n + c_1(E) + \frac{1}{2}(c_1^2(E) - 2c_2(E)) + \dots$$

$$td(E) = 1 + \frac{1}{2}c_1(E) + \frac{1}{12}(c_1(E)^2 + c_2(E)) + \dots$$

下文用到一些代数结构的知识, 在后续章节有述。

### 2.2.2 张量积的公式

看张量积的情况。由于：

$$\mathbf{c}_1(L_1 \otimes L_2) = \mathbf{c}_1(L_1) + \mathbf{c}_1(L_2), \quad \mathbf{c}(L_1 \otimes L_2) = 1 + (\mathbf{c}_1(L_1) + \mathbf{c}_1(L_2))$$

故若  $E$  的 Chern 根是  $\{x_i\}$ ,  $F$  的 Chern 根是  $\{y_i\}$ , 则：

$$\mathbf{c}(E \otimes F) = \prod_i \prod_j (1 + x_i + y_j)$$

此式子展开后相当繁琐。继续繁琐的验算，可验证：

$$\mathbf{ch}(E \otimes F) = \mathbf{ch}(E) \mathbf{ch}(F)$$

由此可见  $\mathbf{ch}$  确实奥妙。

### 2.2.3 外积的公式

看 wedge / exterior product 的情况。令  $E = L_1 \oplus L_2$ , 基为  $\{e_1, e_2\}$ ;  $F = L_3 \oplus L_4$ , 基为  $\{e_3, e_4\}$ 。

则  $E \wedge F$  的基是  $\{e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_4\}$ , 而  $\Lambda^2(E \wedge F)$  的基就只有  $\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4\}$ 。

定义：

$$\mathbf{ch}_t(E) = \sum t^n \mathbf{ch}(\Lambda^n E)$$

这在未来计算 Hodge 数时会很有用。令  $\mathbf{c}_1(L) = x$ , 则：

$$\mathbf{ch}_t(L) = 1 + t e^x$$

对于  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$ , 可验证：

$$\mathbf{ch}_t(E) = \mathbf{ch}_t(E_1) \mathbf{ch}_t(E_2)$$

则若  $E$  的 Chern 根是  $\{x_i\}$ , 有：

$$\mathbf{ch}_t(E) = \prod_i (1 + t e^{x_i})$$

### 2.2.4 对称积的公式

看 symmetric product 的情况。举一个综合的例子，令  $E$  的 Chern 根为  $\{x_1, x_2\}$ , 则  $\otimes^2 E$  的 Chern 根为  $\{2x_1, 2x_2, x_1 + x_2, x_2 + x_1 = x_1 + x_2\}$ ,  $\Lambda^2 E$  的 Chern 根为  $\{x_1 + x_2\}$ ,

$S^2E$  的 Chern 根为  $\{2x_1, 2x_2, x_1 + x_2\}$ 。可见：

$$\otimes^2 = \Lambda^2 \oplus S^2$$

定义：

$$\tilde{\mathbf{ch}}_t(E) = \sum t^n \mathbf{ch}(S^n E)$$

令  $\mathbf{c}_1(L) = x$ ，则：

$$\tilde{\mathbf{ch}}_t(L) = 1 + t e^x + t^2 e^{2x} + \cdots = \frac{1}{1 - t e^x}$$

对于  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$  也有：

$$\tilde{\mathbf{ch}}_t(E) = \tilde{\mathbf{ch}}_t(E_1) \tilde{\mathbf{ch}}_t(E_2)$$

则若  $E$  的 Chern 根是  $\{x_i\}$ ，有：

$$\tilde{\mathbf{ch}}_t(E) = \prod_i \frac{1}{1 - t e^{x_i}}$$

## 2.3 Todd 类的系数与留数定理的应用

虽然 Todd 类的系数看上去很神秘，但实际只需考虑一个简单例子。

注意到对于所有  $a \geq 0$ ，都有  $\chi(\mathbb{P}^a, \mathcal{O}) = 1$ 。由于  $\mathbf{T}_{\mathbb{P}^a} = (a+1)\mathbf{H}$ ，而根据定义  $\mathbf{td}(A \oplus B) = \mathbf{td}(A) \mathbf{td}(B)$ ，所以：

$$\mathbf{td}(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^a}) = \mathbf{td}(\mathbf{H})^{a+1}$$

令  $x = \mathbf{c}_1(\mathbf{H})$ ，则  $\mathbf{td}(\mathbf{H})$  是一个关于  $x$  的级数，令  $f(x) = \mathbf{td}(\mathbf{H})$ 。由于  $\mathbf{ch}(\mathcal{O}) = 1$ ，所以：

$$\chi(\mathbb{P}^a, \mathcal{O}) = \int_{\mathbb{P}^a} \mathbf{td}(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^a}) \tag{3}$$

$$= \int_{\mathbb{P}^a} \mathbf{td}(\mathbf{H})^{a+1} \tag{4}$$

$$= \int_{\mathbb{P}^a} (f(x))^{a+1} \tag{5}$$

$$= 1 \tag{6}$$

则  $f(x)$  满足如下条件：

对于所有  $a \geq 0$ ， $(f(x))^{a+1}$  中  $x^a$  项的系数等于 1

因为之前说过，这里唯一不消失的项是  $\int_{\mathbb{P}^a} x^a = 1$ 。

这已经可以唯一决定  $f(x)$ 。这可通过一个重要技巧证明。根据留数定理：

某级数  $A(x)$  中  $x^a$  项的系数等于  $\frac{A(x)}{x^{a+1}} dx$  的留数

所以我们需要  $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{a+1} dx$  的留数对于所有  $a \geq 0$  等于 1，或者说  $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^a dx$  的留数对于所有  $a \geq 1$  等于 1。

令  $g(x) = \frac{x}{f(x)}$ ，令  $h(y)$  为  $g(x)$  的逆函数。由于  $g(x) = y$ ， $h(y) = x$ ，有：

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^a dx = \left(\frac{1}{g(x)}\right)^a dx \quad (7)$$

$$= \left(\frac{1}{y}\right)^a d(h(y)) \quad (8)$$

$$= \frac{1}{y^a} h'(y) dy \quad (9)$$

令  $h(y) = c_1 y + c_2 y^2 + \dots$ ，则  $\frac{1}{y^a} h'(y) dy$  的留数是  $a \cdot c_a$ ，前面说过要等于 1，所以  $c_a = \frac{1}{a}$ ，则：

$$h(y) = y + \frac{1}{2} y^2 + \dots = -\log(1-y)$$

则  $g(x) = 1 - e^{-x}$ 。

因此：

$$f(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} = \sum_i \frac{(-1)^i B_i}{i!} x^i = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{12} x^2 + \dots$$

## 2.4 示性类：Pontryagin 类，Stiefel-Whitney 类

示性类的由来 obstruction theory, structure group, cohomology

Pontryagin 类  $p_k(E) = (-1)^k \mathbf{c}_{2k}(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \in H^{4k}(X)$

由于  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^*$ ，对于复丛  $E$  有： $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = E \oplus E^*$

则  $c(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \mathbf{c}(E \oplus E^*) = \mathbf{c}(E) \mathbf{c}(E^*) = (1 + \mathbf{c}_1(E) + \mathbf{c}_2(E) + \mathbf{c}_3(E) + \dots)(1 - \mathbf{c}_1(E) + \mathbf{c}_2(E) - \mathbf{c}_3(E) + \dots) = 1 + (-\mathbf{c}_1^2 + 2\mathbf{c}_2) + (\mathbf{c}_2^2 - 2\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_4) + \dots$

因此  $p_1(E) = \mathbf{c}_1^2 - 2\mathbf{c}_2$ ， $p_2(E) = \mathbf{c}_2^2 - 2\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_4$ ，等等

Stiefel-Whitney: Steenrod square, Wu class

对于复丛  $E$ ， $\mathbf{w}_{2k+1}(E) = 0$ ， $\mathbf{w}_{2k}(E) \equiv \mathbf{c}_k(E) \pmod{2}$

## 2.5 未整理的内容

基础：上同调的定义（包括群上同调，等等）。multiplicative sequence and genus: Todd,  $\hat{A}$ ,  $L$ , Elliptic, Witten, 统一看法。Lefschetz theorem etc.

### 3 代数几何：高维的例子

对于  $\mathbb{P}^n$ ，考虑 Euler 序列  $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{H}^{\oplus(n+1)} \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0$ ，由于  $\mathbf{c}(\mathcal{O}) = 1$ ，则：

$$\mathbf{c}(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}) = \mathbf{c}(\mathbf{H}^{\oplus(n+1)}) = \mathbf{c}(\mathbf{H})^{n+1} = (1 + \mathbf{H})^{n+1}$$

注意到：

$$\int_{\mathbb{P}^n} \mathbf{H}^n = 1$$

因为  $\mathbb{P}^n$  中的  $n$  个超平面交于 1 点。于是：

$$\int_{\mathbb{P}^n} \mathbf{c}_n(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}) = n + 1$$

作为验证，最高陈类  $\mathbf{c}_n$  就是欧拉类  $e$ ，可验证  $\deg(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}) = n+1$ ，同时  $\chi(\mathbb{P}^n) = n+1$ 。

#### 3.1 Adjunction 公式

下面介绍重要的 adjunction 公式。考虑  $\mathbb{P}^n$  中的光滑超平面  $X$ ，如果  $X$  的定义方程  $f$  是  $d$  次，则  $f$  是  $\mathcal{O}(d)$  的截面。鉴于在  $X$  附近  $f$  可以作为坐标，有：

$$\mathbf{N}_X \simeq \mathcal{O}(d)|_X$$

故由  $0 \rightarrow \mathbf{T}_X \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}|_X \rightarrow \mathbf{N}_X \rightarrow 0$  知：

$$\mathbf{c}(\mathbf{T}_X) = \frac{\mathbf{c}(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^n})}{\mathbf{c}(\mathbf{N}_X)} = \frac{\mathbf{c}(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^n})}{\mathbf{c}(\mathcal{O}(d))} = \frac{(1 + \mathbf{H})^{n+1}}{1 + d\mathbf{H}}$$

以上序列的对偶形式是  $0 \rightarrow \mathcal{O}(-d)|_X \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}^*|_X \rightarrow \mathbf{T}_X^* \rightarrow 0$ 。

类似的，对于  $\mathbb{P}^n$  中  $a$  次方程和  $b$  次方程确定的  $X$ ，有：

$$0 \rightarrow \mathbf{T}_X \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}|_X \rightarrow (\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b))|_X \rightarrow 0$$

对于 complete intersection 都可以写出类似的序列。

#### 3.2 Hilbert 多项式

考虑  $\mathbb{P}^a$  中的光滑  $d$  次超平面  $X$ 。令：

$$f(n) = \dim H^0(\mathcal{O}(n))$$

当  $n$  足够大时， $f(n)$  可以写成一个关于  $n$  的多项式  $h(n)$ ，称为 Hilbert 多项式。这是因为，当  $n$  足够大时， $H^i(\mathcal{O}(n)) = 0$  对于所有  $i > 0$ ；则  $H^0(\mathcal{O}(n)) = \chi(\mathcal{O}(n))$ ，而：

$$\chi(\mathcal{O}(n)) = \int_X \mathbf{ch}(\mathcal{O}(n)) \cdot \mathbf{td}(\mathbf{T}_X)$$

是关于  $n$  的多项式。

首先考虑  $a = 2$  的情况。根据定义  $\text{ch}(\mathcal{O}(n)) = 1 + n\mathbf{H}$ 。从 adjunction 公式知  $\mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X) = (3 - d)\mathbf{H}$ ，则：

$$\mathbf{td}(\mathbf{T}_X) = 1 + \frac{1}{2}\mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X) = 1 + \frac{3-d}{2}\mathbf{H}$$

对于  $X \subset \mathbb{P}^2$  上的微分形式  $\theta$ ，有：

$$\int_X \theta = \int_{\mathbb{P}^2} \theta \cdot \mathbf{e}(N_X) = \int_{\mathbb{P}^2} \theta \cdot d\mathbf{H}$$

则：

$$\chi(\mathcal{O}(n)) = \int_X \text{ch}(\mathcal{O}(n)) \cdot \mathbf{td}(\mathbf{T}_X) \quad (10)$$

$$= \int_{\mathbb{P}^2} \text{ch}(\mathcal{O}(n)) \cdot \mathbf{td}(\mathbf{T}_X) \cdot d\mathbf{H} \quad (11)$$

$$= \int_{\mathbb{P}^2} (1 + n\mathbf{H}) \cdot (1 + \frac{3-d}{2}\mathbf{H}) \cdot d\mathbf{H} \quad (12)$$

这里唯一不消失的项是  $\int_{\mathbb{P}^2} \mathbf{H}^2 = 1$ ，所以我们将  $\mathbf{H}^2$  的系数挑出来，得到：

$$h(n) = \chi(\mathcal{O}(n)) = d \cdot n + \frac{d(3-d)}{2}$$

根据亏格公式：

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

可写成：

$$h(n) = d \cdot n + (1 - g)$$

然后考虑  $a = 3$  的情况。根据定义  $\text{ch}(\mathcal{O}(n)) = 1 + n\mathbf{H} + \frac{n^2}{2}\mathbf{H}^2$ 。从 adjunction 公式知：

$$\mathbf{c}(\mathbf{T}_X) = 1 + \mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X) + \mathbf{c}_2(\mathbf{T}_X) = \frac{(1 + \mathbf{H})^4}{(1 + d\mathbf{H})}$$

所以：

$$\mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X) = (4 - d)\mathbf{H}, \quad \mathbf{c}_2(\mathbf{T}_X) = (d^2 - 4d + 6)\mathbf{H}^2$$

则：

$$\mathbf{td}(\mathbf{T}_X) = 1 + \frac{1}{2}\mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X) + \frac{1}{12}(\mathbf{c}_1^2(\mathbf{T}_X) + \mathbf{c}_2(\mathbf{T}_X)) \quad (13)$$

$$= 1 + \frac{4-d}{2}\mathbf{H} + \frac{d^2 - 6d + 11}{6}\mathbf{H}^2 \quad (14)$$



因此：

$$\chi(\mathcal{O}(n)) = \int_{\mathbb{P}^3} \left(1 + n \mathbf{H} + \frac{n^2}{2} \mathbf{H}^2\right) \cdot \left(1 + \frac{4-d}{2} \mathbf{H} + \frac{d^2 - 6d + 11}{6} \mathbf{H}^2\right) \cdot d\mathbf{H}$$

同样根据  $\int_{\mathbb{P}^3} \mathbf{H}^3 = 1$ ，我们有：

$$h(n) = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \frac{4d - d^2}{2} \cdot n + \frac{d^3 - 6d^2 + 11d}{6}$$

以上的运算似乎很繁琐。不过其实有一个通用公式：

$$h(n) = \binom{n+a}{a} - \binom{n+a-d}{a}$$

请验证它对于上面的  $a = 2$  和  $a = 3$  都是正确的。

下面从具体例子看这个公式的由来。考虑  $a = 2$  的情况，假设  $X$  的方程为  $X^\alpha Y^\beta Z^\gamma = F(X, Y, Z)$ ，则  $d = \alpha + \beta + \gamma$ 。

由于  $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(1))$  的基是  $\{X, Y, Z\}$ ，而  $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$  的基是  $\{X^2, Y^2, Z^2, XY, XZ, YX\}$ ，以此类推，所以  $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n)) = \binom{n+2}{2}$ 。

前面  $X$  的方程把  $X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$  项删掉，因此也把所有形式如  $X^\alpha Y^\beta Z^\gamma \cdot A(X, Y, Z)$  的项删掉。如果  $n \geq d$ ，在  $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n))$  中总共有  $\binom{n+2-d}{2}$  个这样的项。

因此当  $n \geq d$  时  $f(n) = \binom{n+2}{2} - \binom{n+2-d}{2}$ 。同理可证  $a > 2$  的情况。

如果思考一下，以上的计算有一些意思：当  $n < d$  时， $H^0$  就碰不到某些东西，但  $\chi$  永远是同样的多项式，这是因为高维上同调可以碰到各种东西。此外，从形变理论对上同调的理解也值得了解。

### 3.3 形变理论（待写）

### 3.4 Hodge 数的具体计算

如前所述，如果能通过 Riemann-Roch-Hirzebruch 算出所有：

$$\chi^p = h^0(\Lambda^p) - h^1(\Lambda^p) + h^2(\Lambda^p) \cdots$$

即可算出 complete intersection 的所有 Hodge 数。在 2.2 节定义  $\mathbf{ch}_t(E) = \sum t^p \mathbf{ch}(\Lambda^p E)$ ，有：

$$\chi^p \text{ 对应 } \int_X \mathbf{ch}_t(\mathbf{T}_X^*) \mathbf{td}(\mathbf{T}_X) \text{ 中 } t^p \text{ 的系数}$$

下面具体计算。

### 3.4.1 例子：曲面

算一下  $\mathbb{P}^3$  中由  $d$  次方程定义的光滑曲面  $X$ 。如前所述，唯一有趣的是中间项： $h^{0,2} = h^{2,0}$  和  $h^{1,1}$ 。其 Hodge diamond 如图：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h^{2,2} = 1 & & \\
 & & & & \\
 & h^{2,1} = 0 & & h^{1,2} = 0 & \\
 h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} \\
 & h^{1,0} = 0 & & h^{0,1} = 0 & \\
 & & h^{0,0} = 1 & & 
 \end{array}$$

首先看  $h^{0,2}$ 。由于  $\chi(\mathcal{O}) = h^{0,0} - h^{0,1} + h^{0,2} = 1 - 0 + h^{0,2}$ ，并且之前已经算过  $\chi(\mathcal{O}) = \frac{d^3 - 6d^2 + 11d}{6}$ ，所以：

$$h^{0,2} = \frac{d^3 - 6d^2 + 11d - 6}{6} = \frac{(d-3)(d-2)(d-1)}{6}$$

然后看  $h^{1,1}$ 。先考虑  $\chi(\mathbf{T}_X^*)$ ，我们需要计算  $\text{ch}(\mathbf{T}_X^*)$  和  $\text{td}(\mathbf{T}_X)$ 。

由于  $\mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X^*) = -\mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X)$ ，且  $\mathbf{c}_2(\mathbf{T}_X^*) = \mathbf{c}_2(\mathbf{T}_X)$ ，所以：

$$\text{ch}(\mathbf{T}_X^*) = 2 + \mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{c}_1^2(\mathbf{T}_X^*) - 2\mathbf{c}_2(\mathbf{T}_X^*)) \quad (15)$$

$$= 2 - \mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X) + \frac{1}{2}(\mathbf{c}_1^2(\mathbf{T}_X) - 2\mathbf{c}_2(\mathbf{T}_X)) \quad (16)$$

而：

$$\text{td}(\mathbf{T}_X) = 1 + \frac{1}{2}\mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X) + \frac{1}{12}(\mathbf{c}_1^2(\mathbf{T}_X) + \mathbf{c}_2(\mathbf{T}_X))$$

由 adjunction 公式知  $\mathbf{c}(\mathbf{T}_X) = \frac{(1+\mathbf{H})^4}{1+d\mathbf{H}}$ ，因此：

$$\mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X) = (4-d)\mathbf{H}, \quad \mathbf{c}_2(\mathbf{T}_X) = (d^2 - 4d + 6)\mathbf{H}^2$$

注意  $\int_X \mathbf{H} = d$ 。

所以：

$$\chi(\mathbf{T}_X^*) = \int_X \text{ch}(\mathbf{T}_X^*) \cdot \text{td}(\mathbf{T}_X) \quad (17)$$

$$= \int_X \left(2 - \mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X) + \frac{1}{2}\mathbf{c}_1^2(\mathbf{T}_X) - \mathbf{c}_2(\mathbf{T}_X)\right) \left(1 + \frac{1}{2}\mathbf{c}_1(\mathbf{T}_X) + \frac{1}{12}\mathbf{c}_1^2(\mathbf{T}_X) + \frac{1}{12}\mathbf{c}_2(\mathbf{T}_X)\right) \quad (18)$$

$$= \int_X \frac{1}{6}\mathbf{c}_1^2(\mathbf{T}_X) - \frac{5}{6}\mathbf{c}_2(\mathbf{T}_X) \quad (19)$$

$$= d \cdot \left(\frac{1}{6}(4-d)^2 - \frac{5}{6}(d^2 - 4d + 6)\right) \quad (20)$$

$$= \frac{-2d^3 + 6d^2 - 7d}{3} \quad (21)$$

由于  $\chi(\mathbf{T}_X^*) = h^{1,0} - h^{1,1} + h^{1,2} = 0 - h^{1,1} + 0$ , 所以:

$$h^{1,1} = \frac{2d^3 - 6d^2 + 7d}{3}$$

如果  $d = 4$  则  $h^{0,2} = 1$ ,  $h^{1,1} = 20$ , 这是著名的  $K3$  曲面, 是个 Calabi-Yau 2-流形。

### 3.4.2 例子: Calabi-Yau 3-流形

对于 Calabi-Yau 3-流形  $M$ , 根据 Calabi-Yau 的定义  $h^{3,0} = h^{0,3} = 1$  (由 Calabi-Yau 形式和它的对偶生成)。我们发现  $h^{2,1}$  与复结构有关 (因为 Calabi-Yau 的 canonical bundle  $\Lambda^3 \mathbf{T}_M^*$  是平凡的, 所以  $\Lambda^3 \mathbf{T}_M$  也是平凡的, 所以:

$$H^1(\mathbf{T}_M) \simeq H^1(\Lambda^2 \mathbf{T}_M^*) = H^{2,1}(M)$$

从形变理论中的 Kodaira-Spencer 知  $h^1(\mathbf{T}_M)$  是复结构的维数, 所以此时  $h^{2,1}$  是复结构的维数), 而  $h^{1,1}$  当然与辛结构有关。而 mirror symmetry 交换  $h^{2,1}$  与  $h^{1,1}$ , 某种意义上也与复结构与辛结构之间的关系有关。

经典的 Calabi-Yau 3-流形  $M$  的例子是  $\mathbb{P}^4$  中的 5 次方程 (易验证  $c_1(\mathbf{T}_M) = 0$ )。如前所述, 唯一有趣的是  $h^{1,2} = h^{2,1}$ , 前面说过与复结构有关。

先看一个不严格的算法。在  $\mathbb{P}^4$  中的 5 次方程有  $\binom{9}{4} = 126$  个参数, 其中  $5^2 - 1 = 24$  个能被  $\mathbb{P}^4$  的  $PGL(5, \mathbb{C})$  对称性消除, 另 1 个能被全局的缩放消除, 所以:

$$h^{1,2} = 126 - 24 - 1 = 101$$

这个答案是对的, 但是有问题, 例如我们没有证明所有复结构的变形与  $\mathbb{P}^4$  中的 5 次方程一一对应 (例如, 我们用这个思路算平面代数曲线就可能有问题, 因为当  $a = 2$  且  $d > 4$  时, 复结构的变形并非都是平面代数曲线。不过对于椭圆曲线来说, 的确也可以这样算出复结构的维数是  $\binom{5}{2} - (3^2 - 1) - 1 = 1$ )。

下面换方法证明。考虑正合序列:

$$H^0(\mathbf{T}_M) \rightarrow H^0(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^4}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}(5)|_M) \rightarrow H^1(\mathbf{T}_M) \rightarrow H^1(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^4})$$

可证  $h^0(\mathbf{T}_M) = 0$ ,  $h^1(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^4}) = 0$ ,  $h^0(\mathcal{O}(5)|_M) = 126 - 1 = 125$  (减去 1 是因为减去  $M$  的定义方程),  $h^0(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^4}) = 5^2 - 1 = 24$ 。因此:

$$h^1(\mathbf{T}_M) = 125 - 24 = 101$$

另外由于  $c(\mathbf{T}_M) = \frac{(1+\mathbf{H})^5}{1+5\mathbf{H}} = 1 + 10\mathbf{H}^2 - 40\mathbf{H}^3$ , 故:

$$\chi(M) = \int_M -40\mathbf{H}^3 = -200$$

而  $\chi(M) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 + b_6 = 1 - 0 + 1 - b_3 + 1 - 0 + 1$ , 因此  $b_3 = 204$ 。  
 由于  $h^{3,0} = h^{0,3} = 1$ , 因此  $h^{1,2} = h^{2,1} = 101$ 。

$M$  的 Hodge diamond 如下左图 (它的镜像伙伴  $\widetilde{M}$  的 Hodge diamond 如下右图):

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & 1 & & & & 1 \\
 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 0 & & 0 & 101 & 0 \\
 1 & & 101 & & 101 & & 1 & & 1 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 0 & & 0 & 101 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & & & & 1
 \end{array}$$

关于  $\widetilde{M}$  的具体构造及理论, 见后续章节。

### 3.4.3 例子: $\mathbb{P}^n$

考虑  $X = \mathbb{P}^n$ 。由  $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{H}^{\oplus(n+1)} \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0$  知:

$$\mathrm{td}(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}) = \mathrm{td}(\mathbf{H}^{\oplus(n+1)}) = \mathrm{td}(\mathbf{H})^{n+1} = \left( \frac{\mathbf{H}}{1 - e^{-\mathbf{H}}} \right)^{n+1}$$

由  $0 \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}^* \rightarrow (\mathbf{H}^*)^{\oplus(n+1)} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$  知:

$$\mathrm{ch}_t(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}^*) = \frac{\mathrm{ch}_t(\mathbf{H}^*)^{n+1}}{\mathrm{ch}_t(\mathcal{O})} = \frac{(1 + t e^{-\mathbf{H}})^{n+1}}{1 + t}$$

这里  $\mathrm{ch}_t$  的性质见 2.2 节。

此前说过  $\chi^p(X)$  对应  $\int_X \mathrm{ch}_t(\mathbf{T}_X^*) \mathrm{td}(\mathbf{T}_X)$  中  $t^p$  的系数,  $\int_{\mathbb{P}^n} \mathbf{H}^n = 1$ , 因此:

$$\chi^p(\mathbb{P}^n) \text{ 对应 } \frac{(1 + t e^{-\mathbf{H}})^{n+1}}{1 + t} \left( \frac{\mathbf{H}}{1 - e^{-\mathbf{H}}} \right)^{n+1} \text{ 中 } \mathbf{H}^n t^p \text{ 的系数}$$

运用留数定理化简后得  $\chi^p(\mathbb{P}^n) = (-1)^p$ , 符合:

$$h^{p,q}(\mathbb{P}^n) = \delta_{p,q}$$

### 3.4.4 例子: 超平面

考虑  $\mathbb{P}^n$  中的  $d$  次超平面  $X$ 。由  $0 \rightarrow \mathbf{T}_X \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}|_X \rightarrow \mathcal{O}(d)|_X \rightarrow 0$ , 且:

$$\mathrm{td}(\mathcal{O}(d)) = \frac{d\mathbf{H}}{1 - e^{-d\mathbf{H}}}$$

知:

$$\mathrm{td}(\mathbf{T}_X) = \frac{\mathrm{td}(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^n})}{\mathrm{td}(\mathcal{O}(d))} = \left( \frac{\mathbf{H}}{1 - e^{-\mathbf{H}}} \right)^{n+1} \cdot \frac{1 - e^{-d\mathbf{H}}}{d\mathbf{H}}$$

由  $0 \rightarrow \mathcal{O}(-d)|_X \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}^*|_X \rightarrow \mathbf{T}_X^* \rightarrow 0$ , 且:

$$\mathbf{ch}_t(\mathcal{O}(-d)) = 1 + t e^{-d\mathbf{H}}$$

知:

$$\mathbf{ch}_t(\mathbf{T}_X^*) = \frac{\mathbf{ch}_t(\mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}^*)}{\mathbf{ch}_t(\mathcal{O}(-d))} = \frac{(1 + t e^{-\mathbf{H}})^{n+1}}{(1+t)(1 + t e^{-d\mathbf{H}})}$$

之前说过  $\int_X \alpha = \int_{\mathbb{P}^n} \alpha \cdot d\mathbf{H}$ , 故:

$$\chi^p(X) \text{ 对应 } \frac{(1 + t e^{-\mathbf{H}})^{n+1}}{(1+t)(1 + t e^{-d\mathbf{H}})} \left( \frac{\mathbf{H}}{1 - e^{-\mathbf{H}}} \right)^{n+1} \cdot \frac{1 - e^{-d\mathbf{H}}}{d\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{H} \quad (22)$$

$$= \left( \frac{1 + t e^{-\mathbf{H}}}{1 - e^{-\mathbf{H}}} \mathbf{H} \right)^{n+1} \cdot \frac{1 - e^{-d\mathbf{H}}}{(1+t)(1 + t e^{-d\mathbf{H}})} \text{ 中 } \mathbf{H}^n t^p \text{ 的系数} \quad (23)$$

运用留数定理可进一步化简。

### 3.4.5 例子: complete intersection

同理可以计算任意 complete intersection。例如对于  $\mathbb{P}^n$  中由  $a$  次方程和  $b$  次方程确定的  $X$ , 考虑:

$$0 \rightarrow \mathbf{T}_X \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbb{P}^n}|_X \rightarrow (\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b))|_X \rightarrow 0$$

即可计算。

## 3.5 更多拓扑不变量

**【草稿】** 对于代数曲面, 剩下最重要的是 intersection form (unimodular lattice): rank =  $b_2$ , signature, parity。

如果 signature 不等于正负 rank, 即是 indefinite unimodular lattice, 完全由 rank, signature, parity 决定。令 rank =  $m+n$ , signature =  $m-n$ 。若 parity 为 odd, 则 lattice 必定为所谓  $I_{m,n}$ 。若 parity 为 even, 则 signature 可以被 8 整除, lattice 必定为所谓  $II_{m,n}$ 。

令  $X$  为  $\mathbb{P}^3$  中的  $d$  次超平面。

Signature:  $\sigma(X) = \frac{p_1(\mathbf{T}_X)}{3} = -\frac{d(d-2)(d+2)}{3}$ . Pontryagin:  $p_1 = \mathbf{c}_1^2 - 2\mathbf{c}_2$

Parity 来自 Stiefel-Whitney  $\mathbf{w}_2$ . 此时  $\mathbf{w}_2 \equiv \mathbf{c}_1 \pmod{2} \equiv d \pmod{2}$

Chern 数: degree, intersection. Schubert calculus. etc.

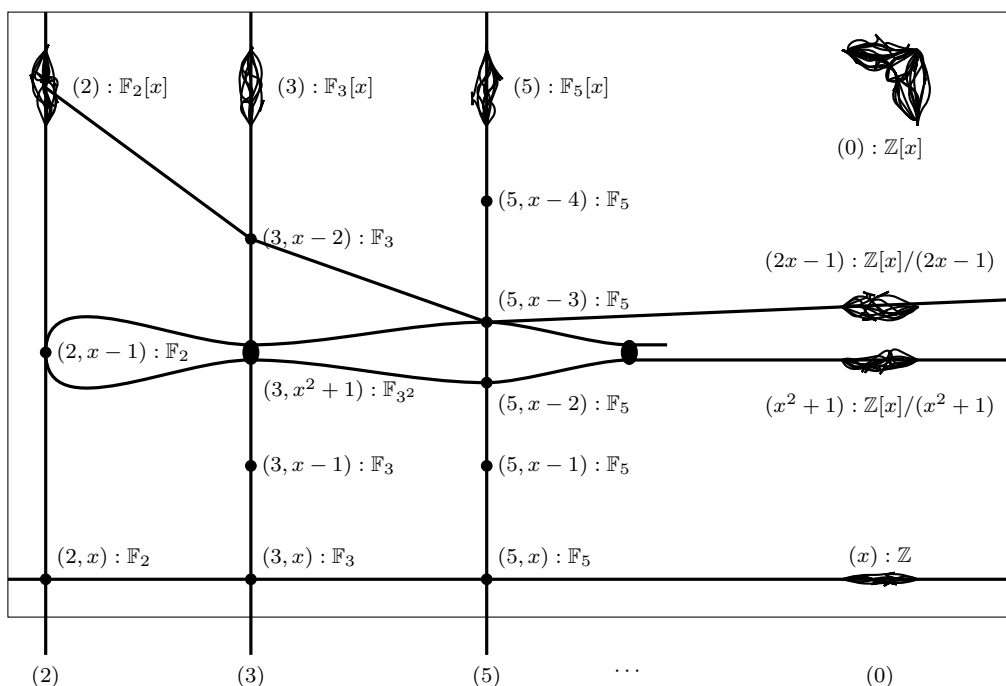
### 3.6 代数闭链

Lefschetz. Hodge conjecture. Deligne cohomology. Intermedia Jacobian. Milnor K-theory. Norm residue theorem. Morava K-theory. Motivic cohomology. etc. Nisnevich topology.  $\mathbb{A}^1$ -homotopy.

Hilbert symbol. Bloch-Kato. Quadratic form. Algebraic K-theory.

### 3.7 算术几何：Mumford 的藏宝图

下图列出了  $\mathbb{Z}[x]$  的一些素理想，以及相应的余域：



其中  $(2)$ ,  $(3, x - 2)$ ,  $(5, x - 3)$ ,  $(2x - 1)$  是一阶曲线  $(2x - 1)$  上的点的例子。

而  $(2, x - 1)$ ,  $(3, x^2 + 1)$ ,  $(5, x - 3)$ ,  $(5, x - 2)$ ,  $(x^2 + 1)$  是二阶曲线  $(x^2 + 1)$  上的点的例子。

此图的结构无疑值得深思。